

**РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ
МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ И ВЫХОДУ РАЗНОГО ПОРЯДКА
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ
АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ ВО ВХОДНЫХ
И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ**

Аннотация.

Актуальность и цели. Использование методов идентификации параметров (как линейных объектов, так и нелинейных) очень распространено в различных областях науки и техники, их применение позволило повысить работоспособность существующих автоматических систем управления, однако не все методы позволяют определять параметры указанных моделей с надлежащими свойствами (состоятельность и др.). Одной из часто применяемых моделей является многомерная по входу и выходу разного порядка дискретная линейная динамическая модель (прогнозирование удельного расхода топлива, электромагнитных параметров двигателей и др.). Целью исследования является разработка нового математического метода оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы в условиях априорной неопределенности (отсутствие знания о законе распределения помех наблюдения) на основе метода стохастической аппроксимации, а также создание и тестирование программного обеспечения, реализующего указанный алгоритм.

Материалы и методы. Предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка дискретной линейной динамической системы с нестационарными автокоррелированными помехами наблюдений во входных и выходных сигналах при отсутствии знания о законах распределения.

Результаты и выводы. Результатом работы является разработанный рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной по входу и выходу разного порядка линейной динамической системы при наличии нестационарных автокоррелированных помех наблюдений во входных и выходных сигналах, доказана сильная состоятельность полученных оценок, а также разработано на основе полученного алгоритма программное обеспечение, реализация которого позволит повысить эффективность систем управления технологическими процессами в различных технических областях.

Ключевые слова: рекуррентный алгоритм, линейная динамическая система, многомерная система, разный порядок, стохастическая аппроксимация, автокорреляция, априорная неопределенность.

I. L. Sandler

**RECURRENT ESTIMATION OF PARAMETERS
BEING MULTIDIMENSIONAL IN TERMS OF INPUT AND OUTPUT
OF VARIOUS ORDERS OF LINEAR DYNAMIC
SYSTEMS IN THE PRESENCE OF AUTOCORRELATED
NOISES IN INPUT AND OUTPUT SIGNALS**

Abstract.

Background. The use of methods to identify parameters of both linear and non-linear objects is very widespread in various areas of science and technology. Such methods enable to increase operability of the existing automatic control systems, however not all methods allow to determine parameters of the specified models with appropriate properties (solvency and others). One of frequently applied models is a discrete linear dynamic model, multidimensional in terms of input and output of various orderz (forecasting of specific fuel consumption, electromagnetic parameters of engines and others). The purpose of the work is to develop a new mathematical method of estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a discrete linear dynamic system in conditions of aprioristic uncertainty (absence of knowledge of the law of distribution of supervision hindrances) on the basis of the method of stochastic approximation, and also to create and test the software realizing the specified algorithm.

Materials and methods. The article offers a recurrent estimation algorithm for parameters that are multidimensional in terms of input and output of various orders of a discrete linear dynamic system with the non-stationary autocorrelated noises of supervision in input and output signals in the absence of knowledge of laws of distribution.

Results and conclusions. The work resulted in the development of the recurrent algorithm of estimation of parameters that are multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system in the presence of non-stationary autocorrelated interferences of supervision in input and output signals. The author proved strong solvency of the received estimates, as well as developed the software which will allow to increase efficiency of control systems of technological processes in various technical areas on the basis of the received algorithm.

Key words: recurrent algorithm, linear dynamic system, multidimensional system, different order, stochastic approximation, autocorrelation, aprioristic uncertainty.

Введение

При решении задач параметрической идентификации стохастических линейных динамических систем (ЛДС) во многих случаях помехи наблюдения присутствуют не только в выходных сигналах, но и во входных, их наличие делает неприменимыми обычные методы регрессионного анализа. В работах [1, 2] рассмотрены частные случаи модели многомерной ЛДС, имеющей разный порядок модели при наличии зашумленного выходного сигнала, а также авторегрессионная модель ЛДС, после чего производится обобщение алгоритма на случай помех во входных и выходных сигналах [3]. Рекуррентные алгоритмы [1–3] разработаны на случай стационарных бел шумных помех наблюдений. В данной статье рассматривается разработка рекуррентного алгоритма, который позволяет определить неизвестный параметр многомерной ЛДС, имеющей разный порядок модели на случай нестационарных автокоррелированных помех наблюдений, действующих как на входные сигналы, так и на выходные.

Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую многомерную ЛДС, имеющую разный порядок модели с дискретным временем ($i = \dots -1, 0, 1, \dots$) и помехами наблюдений

во входных и выходных сигналах, которая описывается следующим разностным уравнением:

$$z_i^{(n)} - \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nn}} b_0^{(mn)}(n) z_{i-m}^{(n)} = \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq n}}^k \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^{(l)} + \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_{nj}} a_0^{(mj)}(n) x_{i-m}^{(j)}, \quad (1)$$

$$y_i^{(l)} = z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i), \quad w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi_2^{(j)}(i), \quad n = \overline{1, k},$$

где $y_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые последовательности выходных сигналов многомерной ЛДС, $l = \overline{1, k}$; k – число выходов (переменных) многомерной ЛДС; $b_0^{(ml)}(n)$, $a_0^{(mj)}(n)$ – искомые параметры многомерной динамической системы; $w_i^{(j)}$, $x_i^{(j)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые последовательности входных сигналов многомерной ЛДС, $j = \overline{1, d}$; d – число входов (переменных) многомерной ЛДС; $\xi_1^{(l)}(i)$ – случайные последовательности (помеха) в l -м выходном сигнале многомерной ЛДС; $\xi_2^{(j)}(i)$ – случайные последовательности (помеха) в j -м входном сигнале многомерной ЛДС.

Для упрощения обозначим вектор следующим образом:

$$\Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}} = \left(\xi_1^{(n)}(i) : \Xi_{\bar{r}_{nn}}^T(i-1) : \Xi_{\bar{r}_{n1}}^T(i-1) : \dots \right. \\ \left. \dots : \Xi_{\bar{r}_{nk}}^T(i-1), \Xi_{r_{n1}}^T : \dots : \Xi_{r_{nd}}^T \right)^T \in R_{\sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} + \sum_{j=1}^d r_{nj} + d + 1}.$$

Пусть матрица

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}} \Xi_{\bar{r}_{nk}, r_{nd}}^T \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \begin{pmatrix} \left(\sigma_1^{(n)} \right)^2 & \left| h_{\xi_{1,2}}^{(n)} \right| \\ \hline h_{\xi_{1,2}}^{(n)T} & H_{\xi_{1,2}}^{(n)} \end{pmatrix},$$

где элементы побочной диагонали состоят из матриц $h_{\xi_{1,2}}^{(n)} = \left| h_{\xi_1}^{(n)} \mid 0 \right|$, причем

порядок матрицы $h_{\xi_1}^{(n)} : 1 \times \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl}$, $0 : 1 \times \sum_{j=1}^d r_{nj} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^k \bar{r}_{nl} + d$; и второй элемент

главной диагонали состоит из матрицы

$$H_{\xi_{1,2}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \bar{H}_{\xi_1}^{(n)} & \mid & 0 \\ \hline 0 & \mid & \bar{H}_{\xi_2}^{(n)} \end{pmatrix},$$

коэффициенты которой расписываются следующим образом:

$$\bar{H}_{\xi_1}^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{\xi_1}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{\xi_1}^{(1)} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & H_{\xi_1}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_{\xi_2}^{(n)} = \begin{pmatrix} H_{\xi_2}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H_{\xi_2}^{(d)} \end{pmatrix},$$

причем

$$H_{\xi_1}^{(l)} = \begin{pmatrix} h_{\xi_1}^{(l)}(0) & \dots & h_{\xi_1}^{(l)}(r_l - 1) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{\xi_1}^{(l)}(r_l - 1) & \dots & h_{\xi_1}^{(l)}(0) \end{pmatrix}, \quad H_{\xi_2}^{(j)} = \begin{pmatrix} h_{\xi_2}^{(j)}(0) & \dots & h_{\xi_2}^{(j)}(r_j) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{\xi_2}^{(j)}(r_j) & \dots & h_{\xi_2}^{(j)}(0) \end{pmatrix},$$

имеющие порядок

$$H_{\xi_1}^{(n)} : \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} \times \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl}, \quad H_{\xi_2}^{(n)} : \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d) \times \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d), \quad 0 : \sum_{l=1}^k \bar{r}_{nl} \times \sum_{j=1}^d (r_{nj} + d).$$

Допустим, что для многомерной линейно разностной модели (1) выполняются следующие условия:

1⁰. Множество $\tilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной динамической системы, является компактом.

2⁰. Последовательности помех во входных и выходных сигналах ЛДС $\{\xi_1^{(l)}(i)\}$, $\{\xi_2^{(j)}(i)\}$ статистически независимы друг от друга и стационарные в совокупности в узком смысле с

$$E\left(\xi_1^{(l)}(i+1) / F_1^{(l)}\right) = 0, \quad E\left(\xi_2^{(j)}(i+1) / F_2^{(j)}\right) = 0,$$

$$E\left[\left\{\xi_1^{(l)}(i+1)\right\}^2 / F_1^{(l)}\right] \leq W_1^{(l)}(i), \quad E\left[\left\{\xi_2^{(j)}(i+1)\right\}^2 / F_2^{(j)}\right] \leq W_2^{(j)}(i),$$

где $F_1^{(l)}$, $F_2^{(j)}$ – σ -алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\{\xi_1^{(l)}(i_0), \dots, \xi_1^{(l)}(i)\}$, $\{\xi_2^{(j)}(i_0), \dots, \xi_2^{(j)}(i)\}$; $W_1^{(l)}(i)$, $W_2^{(j)}(i)$ – случайные величины $E(W_1^{(l)}(i)) \leq \pi_{\xi_1^{(l)}}(i)$, $E(W_2^{(j)}(i)) \leq \pi_{\xi_2^{(j)}}(i)$ с $l = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, d}$, где E – оператор математического ожидания.

3⁰. Допустим выполнение следующего условия:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_1^{(l)}(i) \xi_1^{(l)}(i+m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_{\xi_1}^{(l)}(m) < \infty \text{ п.н.,}$$

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \xi_2^{(j)}(i) \xi_2^{(j)}(i+m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h_{\xi_2}^{(j)}(m) < \infty \text{ п.н.}$$

4⁰. Входные последовательности $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$ статистически не зависят от последовательности помех наблюдений $\{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\}$.

5⁰. Входные последовательности $\{x_i^{(j)}\}$ стационарные в совокупности в узком смысле с дробно-рациональной плотностью – случайные величины с $E\left\{\left(x_i^{(j)}\right)^2\right\} > 0$ и для некоторого $\pi_x^{(j)} > 0: |x_i^{(j)}| < \pi_x^{(j)}$ п.н.

6⁰. Допустим, что выполняется условие несократимости полиномов:

$$B^{(n)}(q^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nn}} b_0^{(mn)} \cdot q^{-m}, \quad A^{(j)}(q^{-1}) = \sum_{m=0}^{\bar{r}_{nj}} a_0^{(mj)} \cdot q^{-m},$$

$$B^{(l)}(q^{-1}) = \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)} \cdot q^{-m},$$

где q^{-1} – оператор сдвига назад, $q^{-1}x_i = x_{i-1}$.

Требуется по наблюдаемым входным и выходным последовательностям $\{y_i^{(l)}\}, \{w_i^{(j)}\}$ рекуррентно определить оценки неизвестных параметров многомерной ЛДС разного порядка, описываемой разностным уравнением (1).

Рекуррентный алгоритм идентификации параметров многомерной ЛДС разного порядка

Используя полученные результаты [3], неизвестные параметры многомерной ЛДС можно определить, применив следующий критерий, при котором получаемые оценки будут сильно состоятельные:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E \left[y_i^{(n)} - \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T \left(\frac{Y_{r_{nk}}(i-1)}{W_{r_{nd}}(i)} \right) \right]^2$$

$$\min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in \bar{B}} \frac{\bar{H}_{\xi_1}^{(n)}(n) b(n)^T + a(n) \frac{\bar{H}_{\xi_2}^{(n)}(n) a(n)^T}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} - 2 \frac{h_{\xi_1}^{(n)}(n)}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} b(n)}{1 + b(n) \frac{\bar{H}_{\xi_1}^{(n)}(n)}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} + a(n) \frac{\bar{H}_{\xi_2}^{(n)}(n)}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} a(n)^T - 2 \frac{h_{\xi_1}^{(n)}(n)}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} b(n)}, \quad (2)$$

где

$$b(n) = \left(\left(b^{(1)}(n) \right)^T \dots \left(b^{(k)}(n) \right)^T \right)^T, \quad a(n) = \left(\left(a^{(1)}(n) \right)^T \dots \left(a^{(d)}(n) \right)^T \right)^T,$$

$$b^{(l)}(n) = \left(b^{(1l)}(n), \dots, b^{(\bar{r}_{nl})}(n) \right)^T, \quad a^{(j)}(n) = \left(a^{(0j)}(n), \dots, a^{(r_{nj}j)}(n) \right)^T,$$

$$Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1) = \left(y_{\bar{r}_{nk}}^{(n)T} \dots y_{\bar{r}_{nk}}^{(k)T} \right)^T, \quad W_{r_{nd}}(i) = \left(w_{r_{nd}}^{(1)T} \dots w_{r_{nd}}^{(d)T} \right)^T,$$

$$y_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) = \left(y_{i-1}^{(l)}, \dots, y_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right)^T, \quad w_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left(w_i^{(j)}, \dots, w_{i-r_{nj}}^{(j)} \right)^T.$$

Таким образом, оценки неизвестного вектора параметров $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix}$

многомерной ЛДС разного порядка можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма минимизации функционала (2), который будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{i+1}(n) \\ \hat{a}_{i+1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix} - \alpha_i \nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \left[\frac{\left(y_{i+1}^{(n)} - \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \left| \frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i+1)}{W_{r_{nd}}(i+1)} \right| \right)^2}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))} \right], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n)) &= 1 + b(n) \frac{\bar{H}_{\xi_1}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} (n) b(n)^T + \\ &+ a(n) \frac{\bar{H}_{\xi_2}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} (n) a(n)^T - 2 \frac{h_{\xi_1}^{(n)}}{(\sigma_1^{(n)})^2} b(n), \end{aligned}$$

α_i — последовательность, для которой должны выполняться следующие условия:

$$7^0. \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty, \quad \alpha_i \geq \alpha_{i+1}, \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^t < \infty \quad \text{при} \quad t > 1.$$

$$8^0. \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_1^{(l)}(i) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_2^{(j)}(i) < \infty, \quad \text{п.н.}$$

Теорема. Пусть многомерная ЛДС разного порядка описывается разностным уравнением (1) и выполняются условия 1⁰–8⁰, тогда оценки, определяемые стохастически градиентным алгоритмом (3) с вероятностью 1 при

$i \rightarrow \infty$ либо сходятся в единственной точке $\left| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right|$, либо рас-

сходятся $\left| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} \infty$.

Доказательство теоремы. Доказательство состоятельности получае-
мых с помощью стохастически градиентного алгоритма (3) оценок базируется на методе непрерывных моделей [2].

Построим асимптотическую непрерывную детерминируемую модель алгоритма (3). Тогда функционал (2) представим в виде

$$J\left(\frac{b(n)}{a(n)}\right) = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} E \left(y_i^{(n)} - \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T \left(\frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1)}{W_{r_{nd}}(i)} \right) \right)^2}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))} =$$

$$= \left(\sigma_1^{(n)} \right)^2 + \frac{\left(\left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| - \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right| \right)^T H^* \left(\left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| - \left| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right| \right)}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))}$$

$$\text{при } \left| \frac{b(n)}{a(n)} \right| \in R_{\bar{r}_{nn} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d},$$

где матрица H^* имеет вид

$$H^* = \lim_{i \rightarrow \infty} E \left| \begin{array}{c|c} \left| \frac{z^{(n)}}{\bar{r}_{nn}} \right| & \left| \frac{z^{(n)}}{\bar{r}_{nn}} \right|^T \\ \left| \frac{z^{(1)}}{\bar{r}_{n1}} \right| & \left| \frac{z^{(1)}}{\bar{r}_{n1}} \right|^T \\ \vdots & \vdots \\ \left| \frac{z^{(k)}}{\bar{r}_{nk}} \right| & \left| \frac{z^{(k)}}{\bar{r}_{nk}} \right|^T \\ \left| \frac{x^{(1)}}{r_{n1}} \right| & \left| \frac{x^{(1)}}{r_{n1}} \right|^T \\ \vdots & \vdots \\ \left| \frac{x^{(d)}}{r_{nd}} \right| & \left| \frac{x^{(d)}}{r_{nd}} \right|^T \end{array} \right| > 0, \quad H^* = \left(\begin{array}{c|c} H_{zz}^* & H_{zx}^* \\ \hline (H_{zx}^*)^T & H_{xx}^* \end{array} \right) > 0$$

где

$$Z_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) = \left| z_{i-1}^{(l)}, \dots, z_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right|^T - \text{вектор-строка размерностью } \bar{r}_{nl} \times 1,$$

$$X_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left| x_i^{(j)}, \dots, x_{i-r_{nj}}^{(j)} \right|^T - \text{вектор-строка размерностью } (r_{nj} + 1) \times 1,$$

порядка

$$(\bar{r}_{nn} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d) \times (\bar{r}_{nn} + \bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk} + r_{n1} + \dots + r_{nd} + d),$$

что следует из условий $1^0, 4^0, 6^0$.

В данном случае асимптотическая непрерывная детерминированная модель стохастически градиентного алгоритма имеет вид

$$\left(\frac{\dot{b(n)}}{a(n)} \right) = -\nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right). \quad (4)$$

Допустим, что функция Ляпунова будет иметь следующий вид:

$$V \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \dot{V} \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) &= \nabla^T \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) V \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = \\ &= - \left\| \nabla \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \right\|^2, \quad \nabla^T \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) V \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

то множество

$$\tilde{B} = \left\{ \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in R_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d)} : \dot{V} \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = 0 \right\}$$

состоит из стационарных точек функционала $J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)$ [2].

Чтобы перейти к непрерывной модели от алгоритма (3), необходимо показать, что для случайных последовательностей $\{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\}$ и $\{\alpha_i\}$ выполняется равенство [4]:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{T} \left\| \sum_{i=t}^{m(t,T)} \alpha_i e_i \left(\left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right), \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) \right\| = 0, \quad (6)$$

где для $T > 0$, $m(t, T) = \max \left\{ m : \sum_{i=t}^m \alpha_i \leq T \right\}$ $\|\bullet\|$ – евклидова норма;

$$e_i \left(\left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right), \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) = \xi_1^{(n)}(i) - \Xi_{r_{nn}}^T b^{(n)}(n) - \Xi_{r_{n1}}^T b^{(1)}(n) - \dots \\ \dots - \Xi_{r_{nk}}^T b^{(k)}(n) - \Xi_{r_{n1}}^T a^{(1)}(n) - \dots - \Xi_{r_{nd}}^T a^{(d)}(n).$$

Чтобы выполнялось равенство (6), необходима ограниченность последовательности $\left\{ \left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right) \right\}$, что соответственно предполагает ограниченность возрастания функции $\nabla \left(\frac{b}{a} \right)^J \left(\frac{b}{a} \right)$ при $\left\| \frac{b}{a} \right\| \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{\left\| \frac{b}{a} \right\| \rightarrow \infty} \nabla \left(\frac{b}{a} \right)^J \left(\frac{b}{a} \right) = 0.$$

Из ограниченности алгебраических сумм в условии 8^0 и последовательности оценок параметров $\left\{ \left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right) \right\}$ следует ограниченность суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \left(\left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right), \{\xi_1^{(l)}(i)\}, \{\xi_2^{(j)}(i)\} \right) < \infty,$$

откуда следует выполнение равенства (6).

В работе [5, с. 12, 292] приведены теоремы, из которых следует, что при выполнении условий $1^0 - 8^0$ и (5) (6) последовательность оценок параметров $\left\{ \left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right) \right\}$ ограничена и при $i \rightarrow \infty$, тогда последовательность оценок параметров $\left\{ \left(\frac{\hat{b}(i)}{\hat{a}(i)} \right) \right\}$ стремится к точкам множества $\tilde{B}$.

Исследуя асимптотическую непрерывную детерминированную модель (4), покажем, что множество B_* состоит из одной единственной точки

$$\left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right):$$

$$B_* = \left\{ \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \in R_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d)} : \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\}.$$

Дальнейший ход доказательства функции (7) теоремы аналогичен доказательству теоремы, приведенному в [3]:

$$J'(u) = \frac{u^T H_1^* u}{u^T H'_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)} u}, \quad (7)$$

где

$$u = \left[u_1, \dots, u_{\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1} \right]^T \in R_{\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1},$$

$$H_1^* = \lim_{i \rightarrow \infty} E \left[\begin{array}{c} \left| \frac{-y_i^{(n)}}{Y_{\bar{r}_{nk}}(i)} \right| \\ \left| \frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i)}{W_{r_{nd}}(i)} \right| \end{array} \middle| -y_i^{(n)} \right] Y_{\bar{r}_{nk}}^T(i) \left| \frac{W_{r_{nd}}^T(i)}{Y_{\bar{r}_{nk}}(i)} \right|,$$

$$H'_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\left(h_{\xi_{1,2}}^{(n)} \right)^T}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} \\ \frac{h_{\xi_{1,2}}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} & \frac{H_{\xi_{1,2}}^{(n)}}{\left(\sigma_1^{(n)} \right)^2} \end{pmatrix}.$$

Результаты моделирования рекуррентного алгоритма идентификации параметров многомерной ЛДС разного порядка

На основе разработанного алгоритма (3) с использованием предыдущих программных продуктов для рекуррентного оценивания со стационарными белозумными помехами [5, 6] разработан программный продукт на случай нестационарных автокоррелированных помех [7], который создан посредством пакета моделирования MatLab 7.0.

Для подтверждения эффективности оценивания разработанного стохастически градиентного алгоритма (3) реализован рекуррентный МНК. В модельном примере многомерная ЛДС разного порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 z_i^{(1)} &= 1,2z_{i-1}^{(1)} - 0,7z_{i-2}^{(1)} - 0,3z_{i-1}^{(2)} + 1,2z_{i-2}^{(2)} + x_i^{(1)} + \\
 &+ 0,6x_{i-1}^{(1)} - 0,3x_{i-2}^{(1)} - 0,4x_{i-3}^{(1)} + x_i^{(2)} + 0,4x_{i-1}^{(2)}, \\
 z_i^{(2)} &= 0,5z_{i-1}^{(1)} - 0,7z_{i-2}^{(1)} - 0,7z_{i-1}^{(2)} + x_i^{(1)} + 0,6x_{i-1}^{(1)} + 0,2x_{i-3}^{(1)} + x_i^{(2)} + 0,4x_{i-1}^{(2)}, \\
 y_i^{(l)} &= z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i), \\
 w_i^{(j)} &= x_i^{(j)} + \xi_2^{(j)}(i)
 \end{aligned}$$

На j -й вход многомерной ЛДС разного порядка подавался сигнал вида

$$x_i^{(j)} - 0,5x_{i-3}^{(j)} = \zeta_i^{(j)} - 0,5\zeta_{i-2}^{(j)} + 0,3\zeta_{i-3}^{(j)} + 0,2\zeta_{i-4}^{(j)},$$

где $\zeta_i^{(j)}$ – стационарный белый шум.

Помехи наблюдений во входных сигналах ЛДС описываются следующими уравнениями:

$$\xi_1^{(d)}(i) = -0,5 \cdot \xi_1(i-1) - 0,3 \cdot \xi_1(i-2) + e_i$$

с дисперсией вида

$$\sigma_1^2(i) = 0,02 + 0,7 \cdot \sigma_1^2(i-1) + 0,2 \cdot \xi_1^2(i-1).$$

Помехи в выходных сигналах многомерной ЛДС:

$$\xi_2^{(k)}(i) = -0,5 \cdot \xi_2(i-1) - 0,3 \cdot \xi_2(i-2) + e_i$$

с дисперсией вида

$$\sigma_2^2(i) = 0,08 + 0,7 \cdot \sigma_2^2(i-1) + 0,2 \cdot \xi_2^2(i-1).$$

Начальные значения параметров линейной динамической системы полагались равными нулю. Отношение полезного сигнала к помехе на выходе и выходе многомерной ЛДС составляло 0,5. На рис. 1, 2 представлены графики относительных погрешностей оценок параметров для первого и второго выходов линейной динамической системы, определяемые по соотношению

$$\delta\theta_i(n) = \sqrt{\left\| \left(\frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right) - \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\|^2} / \left\| \left(\frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right) \right\|^2 \cdot 100 \%.$$

Заключение

Анализируя полученные графические характеристики (рис. 1, 2), доказали, что предложенный алгоритм (3) моделирования многомерных по входу и выходу ЛДС разного порядка при наличии автокоррелированных помех наблюдений во входных и выходных сигналах эффективен и дает возмож-

ность получения наиболее точных оценок параметров системы в сравнении с классическим методом наименьших квадратов рекуррентной формы.

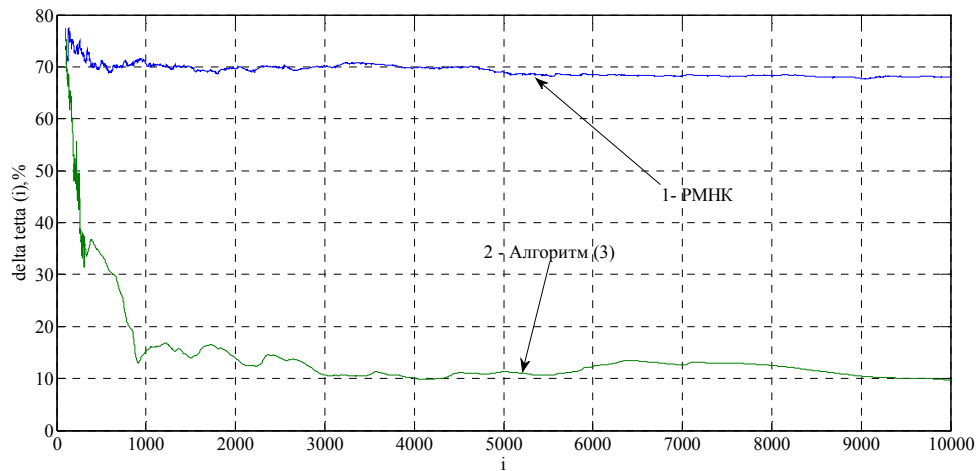


Рис. 1. Графики относительных погрешностей определения параметров для первого выхода линейной динамической системы: 1 – рекуррентный МНК; 2 – градиентный алгоритм (3) определения оценок параметров

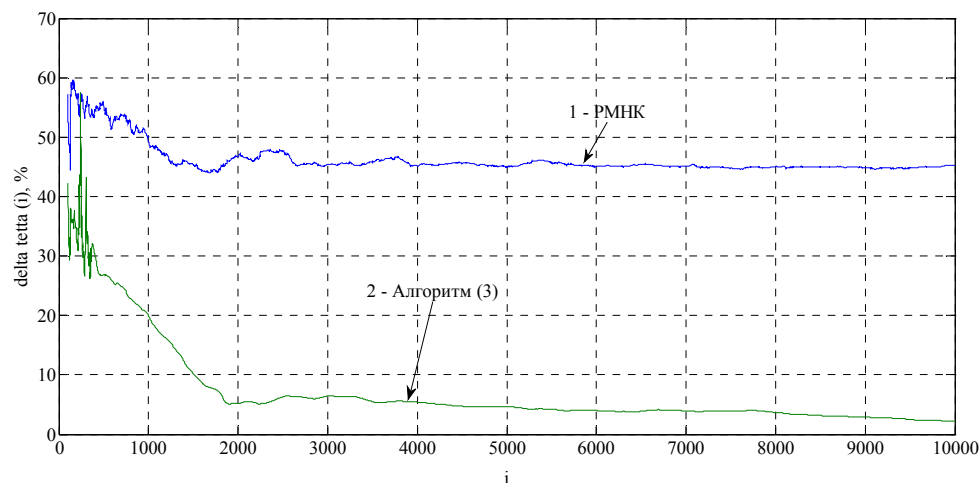


Рис. 2. Графики относительных погрешностей определения параметров для второго выхода линейной динамической системы: 1 – рекуррентный МНК; 2 – градиентный алгоритм (3) определения оценок параметров

Список литературы

1. Сандлер И. Л. Рекуррентное оценивание параметров авторегрессии многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехой в выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 1 (47). – С. 31–35.
2. Сандлер, И. Л. Рекуррентная идентификация параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами

- в выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Вестник транспорта Поволжья. – 2012. – № 2 (32). – С. 68–74.
3. **Кацюба, О. А.** Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах методом стохастической аппроксимации / О. А. Кацюба, И. Л. Сандлер // Системы управления и информационные технологии. – 2012. – № 1 (47). – С. 31–34.
 4. **Chen, H. F.** Stochastic Approximation and Its Applications / H. F. Chen. – Dordrecht : Kluwer, 2002. – 357 p.
 5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012615960. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами во входных и выходных сигналах / Сандлер И. Л. – 29.06.2012.
 6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619621. Рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерных линейных динамических систем разного порядка со стационарными белыми шумами / Сандлер И. Л. – 11.10.2013.
 7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013611203. Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах / Сандлер И. Л. – 09.01.2013.

References

1. Sandler I. L. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies]. 2012, no. 1 (47), pp. 31–35.
2. Sandler I. L. *Vestnik transporta Povolzh'ya* [Bulletin of Volga region transport]. 2012, no. 2 (32), pp. 68–74.
3. Katsyuba O. A., Sandler I. L. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies]. 2012, no. 1 (47), pp. 31–34.
4. Chen H. F. *Stochastic Approximation and Its Applications*. Dordrecht: Kluwer, 2002, 357 p.
5. Computer software state registration certificate № 2012615960. Recurrent estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system with noises in input and output signals. Sandler I. L. 29.06.2012.
6. Computer software state registration certificate № 2013619621. A recurrent estimation algorithm for parameters of multidimensional linear dynamic systems of various orders with stationary white noises. Sandler I. L. 11.10.2013.
7. Computer software state registration certificate № 203611203. Recurrent estimation of parameters being multidimensional in terms of input and output of various orders of a linear dynamic system with autocorrelated interferences in input and output signals. Sandler I. L. 09.01.2013.

Сандлер Илья Львович

аспирант, Самарский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18)

E-mail: viruskvam@bk.ru

Sandler Il'ya L'vovich

Postgraduate student, Samara State Transport University (18 1-y Bezymyanniy lane, Samara, Russia)

УДК 519.254

Сандлер, И. Л.

Рекуррентное оценивание параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем при наличии автокоррелированных помех во входных и выходных сигналах / И. Л. Сандлер // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 14–27. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-2